Eine Geschichte von zwei Wahrscheinlichkeiten[1]

RUMA FALK, JERUSALEM; KEITH KENDIG, CLEVELAND

[1] Übersetzt und bearbeitet von HANS-DIETER SILL, Originalartikel: A tale of two probabilities, Teaching Statistics. 35(2013)1, S. 49–52

Zusammenfassung: *Zwei Kontrahenten diskutieren das bekannte Wahrscheinlichkeitsproblem des Geschlechtes des zweiten Kindes. Es werden die zugrunde liegenden Szenarien und Voraussetzungen herausgestellt. Grundlegende Prinzipien der Wahrscheinlichkeitstheorie werden beleuchtet.*

Einleitung

Moderator. Zwei Mitglieder unseres statistischen Instituts, Tom und Jerry, streiten sich seit einigen Wochen. Im Zentrum ihrer Kontroverse steht dieses einfache Problem:

> Ein Paar hat zwei Kinder und man erfährt, dass eines von ihnen ein Mädchen ist. Wenn man nur das weiß, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kinder Mädchen sind?

Toms Antwort ist ½, aber Jerry beharrt darauf, dass die Antwort ⅓ ist. Um ihren Streit zu beenden, sind sie übereingekommen, diese offene Debatte durchzuführen. Möge der bessere gewinnen! Wir werden alles aufzeichnen und transkribieren. Ich werde einige relevante Literaturquellen im Interesse unserer Studierenden hinzufügen. Tom, du hast den Münzwurf gewonnen, also beginne bitte.

Die Debatte

Tom. Vielen Dank. Eigentlich sollte dies keine lange Debatte werden, da Jerry und ich bereits darin übereinstimmen, dass die Geburt von Kindern wie das Werfen eine Münze zu verstehen ist. Dies bedeutet, wir können davon ausgehen, dass die Wahrscheinlichkeit einen Jungen zu bekommen die gleiche ist wie ein Mädchen, nämlich genau ½ (dies ist in der Realität näherungsweise richtig). Und wie bei den Ergebnissen eines Münzwurfes setzen wir voraus, dass die Geschlechter von verschiedenen Kindern unabhängig voneinander sind. Was macht es nun, wenn man feststellt, dass ein Kind ein Mädchen ist? Das andere Kind kann mit Verlaub gesagt ebenfalls als Ergebnis eines Münzwurfes angesehen werden, und so ist es doch *offensichtlich*, dass die Wahrscheinlichkeit, dass es ein Mädchen ist, ½ beträgt. Es scheint allerdings etwas schwierig zu sein, meinen verehrten Kollegen von dieser „bodenständigen“ Logik zu überzeugen. (Carlton; Stansfield 2005)

Jerry. Deine Logik ist zu simpel. Um das Problem zu lösen, muss man auf den Ereignisraum zurückgehen. Der Ereignisraum für das ursprüngliche Experiment der zufälligen Auswahl einer Zwei-Kind-Familie und der Beobachtung des Geschlechtes ihrer Kinder ist *{JJ, JM, MJ, MM}*, wobei der erste Buchstabe das zuerst geborene und der zweite Buchstabe das zweitgeborene Kind bedeutet. Wir vereinbaren, dass bevor wir zusätzliche Informationen erhalten, die Wahrscheinlichkeit für jedes Element dieses Raumes ¼ ist, aber sobald wir erfahren, dass ein Kind ein Mädchen ist, handelt es sich um ein Problem der bedingten Wahrscheinlichkeit. Das bedingende Ereignis ist *{JM, MJ, MM}*. Alle diese drei Ereignisse haben die gleiche Wahrscheinlichkeit, eines davon ist *MM*. Das führt zu der bedingten Wahrscheinlichkeit ⅓ für *MM*.

Tom. Nun, ich kann das Ereignisraum-Spiel ebenfalls spielen. Wir stimmen beide überein, dass ein Kind zu bekommen dem Wurf eine Münze entspricht, so lass uns jetzt das Problem mit den Worten Wappen und Zahl formulieren:

> Man wirft zweimal eine faire Münze. Beim ersten Mal sieht man, dass Wappen oben liegt. Wenn man nur das weiß, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Würfe Wappen zeigen?

Wenn man zuerst Wappen sieht, sagt uns das, dass beide Ereignisse *WW* und *WZ* entfallen. Die Bedingung ist dann das Ereignis *{WW, WZ}*, das aus zwei gleich wahrscheinlichen Ereignissen besteht, eines davon ist *WW*. Dies führt zu der bedingten Wahrscheinlichkeit von ½ für *WW*.

Jerry. Halt! Das ist keine angemessene Übersetzung. Bei jedem der vier Ereignisse *WW, WZ, ZW, ZZ* steht der erste Buchstabe für das Ergebnis des ersten Wurfes und der zweite für das Ergebnis des zweiten Wurfes. Dies gilt analog für *JJ, JM, MJ, MM*. Du hast das Problem des Münzwurfes perfekt gelöst, aber es tangiert nicht das Problem, das wir hier debattieren. Es ist nämlich so, dass wir nicht wissen, ob das Mädchen, welches wir gesehen haben, das jüngere oder das ältere Kind ist. Bei deinem Münzwurfproblem dagegen wissen wir, dass das von uns gesehene Ergebnis Wappen der „ältere“ Wurf ist, wodurch dieses Problem viel einfacher wird. Wenn wir vereinbaren, dass das Mädchen, das wir sehen das ältere ist, dann stimme ich der Lösung ½ zu und wir würden diese Diskussion nicht haben. (Bar-Hillel; Falk 1982; Gardner 1959, S. 51)

Tom. Ich verstehe deinen Standpunkt, aber ich sehe ebenfalls in deiner Lösung eine fatale Schwachstelle. Du setzt dabei voraus, dass alle drei Möglichkeiten *JM, MJ, MM* gleichwahrscheinlich sind. Aber ist das gerechtfertigt? Wenn ich ein Mädchen sehe, entfällt in der Tat der Fall *JJ*, es bleiben drei Ereignisse übrig, aber ich glaube nicht, dass das Modell der Gleichwahrscheinlichkeit in dieser Situation geeignet ist. Es kann doch sein, dass die Beobachtung eines Mädchens zu verschiedenen Wahrscheinlichkeiten für diese drei Optionen führt. Du musst exakt angeben, wie diese Beobachtung zustande kommt.

Jerry. Ha! Du hast wohl schon erkannt, dass ich die Debatte gewonnen habe, und stocherst nun im Nebel herum, um das Ergebnis zu verschleiern. Was ist denn genau deine Position?

Tom. Wir verehren beide die klassische Schrift von Feller, nicht wahr? Er erläutert von Beginn an, dass sich Wahrscheinlichkeiten auf Ereignisse von wohldefinierten realen oder modellhaften statistischen Experimenten beziehen müssen. Wenn du also die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis *MM* bestimmen willst, so musst du den tatsächlichen empirischen Mechanismus berücksichtigen, der zu dem Ereignis führt, dass ein Mädchen beobachtet wird. Du hast uns bisher nicht erklärt, welcher Vorgang das ist, wie wurde die Existenz eines Mädchens festgestellt? Dies könnte dein Boot zum Sinken bringen. (Feller 1957, S. 7–9,22; Fisher 1934; Nickerson 1996)

Jerry (der dies von Tom nicht erwartet hatte und nun etwas defensiv wirkt). Nun, natürlich haben Feller und Fisher recht. Ich vermute, dass eine vernünftige Voraussetzung sein könnte, dass das Mädchen, das gesehen wurde, sich durch eine zufällige Auswahl aus den beiden Kindern ergab. Wir können das Mädchen in der Stadt mit ihrer Mutter treffen, die immer zufällig entscheidet, welches der beiden Kinder sie begleiten soll. Man muss allerdings auch feststellen, dass die Wahrscheinlichkeit eines solchen Treffens sehr gering ist. Um sicherzugehen, lass uns das folgende bedingende Ereignis präzise definieren: „Ein Kind, welches zufällig aus einer Familie mit zwei Kindern ausgewählt wurde, wurde gesehen und es war ein Mädchen.“ (Glickman 1982)

Tom. Wozu führt das?

Jerry (geht zur Tafel). Okay lass uns das bedingende Ereignis mit m bezeichnen. Das Gegenereignis ist die Beobachtung, dass ein zufällig ausgewähltes Kind ein Junge ist, und es wird mit j bezeichnet. Unser Ereignisraum besteht nun aus acht geordneten Tripeln, die bisherigen vier Ereignisse werden entweder mit m oder mit j verbunden. Diese acht Ereignisse sind nun nicht mehr gleichwahrscheinlich (zum Beispiel ist die Wahrscheinlichkeit von *MMj* gleich Null, während die Wahrscheinlichkeit von *MMm* ¼ beträgt). Ich werde nun zweckmäßigerweise nicht mehr mit dem speziellen Ereignisraum weiterarbeiten, sondern direkt unter Anwendung des Satzes von Bayes die interessierende bedingte Wahrscheinlichkeit berechnen. Dies ist ein typischer Fall für die Anwendung der Bayes-Formel. Die Apriori-Wahrscheinlichkeiten für *JJ, JM, MJ* und *MM* sind alle ¼ und mit dem Satz von Bayes können wir die bedingten Wahrscheinlichkeiten ermitteln, wenn m gegeben ist.

$$P(MM|m) = \frac{P(m|MM) \cdot P(MM)}{P(m|MM) \cdot P(MM) + P(m|JM) \cdot P(JM) + P(m|MJ) \cdot P(MJ) + P(m|JJ) \cdot P(JJ)}$$

$$= \frac{1 \cdot 1/4}{1 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/4 + 1/2 \cdot 1/4 + 0 \cdot 1/4} = \frac{1}{2}$$

Auf ähnliche Weise kann man berechnen dass $P(JM|m) = P(MJ|m) = ¼$ und $P(JJ|m) = 0$ ist. Oh Gott! Dies führt tatsächlich zur Lösung ½ für das Problem, nicht wahr? (Falk 1993, Problem 2.4.11)

Tom. (lächelt triumphierend) Und wie steht es nun um deine „geeignete“ Voraussetzung, dass *MM, JM* und *MJ* alle gleichwahrscheinlich sind? In Wirklichkeit sind die Wahrscheinlichkeiten ½, ¼ und ¼.

Jerry. Nun, du bist ja derjenige, der sagt, dass man den Vorgang, der zur Beobachtung des Mädchens führt, genau betrachten muss, also werde ich sofort etwas wählen, was zu meiner Rechnung passt. Mein Vorschlag, dass die Mutter immer zufällig auswählt, welches Kind sie mitnimmt, war ein bisschen voreilig.

Tom. Hast du einen besseren Vorschlag?

Jerry. Nun, es gibt wahrscheinlich Dutzende Hintergrundszenarien, die potenziell die Antwort beeinflussen können. (Nickerson 1996)

Tom (spöttisch). Dann wähle doch einen für unser Publikum.

Jerry (lange nachdenkend) Warte einen Augenblick. Wie steht es damit? Vorausgesetzt ich erfahre, dass eine Zwei-Kind-Familie wenigstens eine Tochter hat, durch das Treffen der Eltern bei einer Veranstaltung für Eltern von Pfadfinderinnen. Mein anfänglicher Ereignisraum ist erneut *{JJ, JM, MJ, MM}*. Das bedingende Ereignis ist $m' = \{JJ, JM, MJ, MM\}$. Die

Frage lautet, wie groß ist $P(MM|m')$? Es ist klar, dass $P(MM \cap m')$ der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass beide Kinder Mädchen sind, also ¼ und die Wahrscheinlichkeit, dass es wenigstens eine Tochter gibt, ¾ beträgt. Daraus ergibt sich:

$$P(MM|m') = \frac{P(MM \cap m')}{P(m')} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$$

(Loyer 1983)

Tom. (schweigt verdutzt)

Schlussfolgerungen

Moderator. Ich hätte nicht gedacht, dass die Debatte auf diese Weise verlaufen würde! Es sieht so aus, dass unsere Jungs gerade nachgewiesen haben, dass die richtige Antwort sein sollte: „Es gibt nicht genug Informationen für eine Entscheidung“, da der Hintergrundmechanismus nicht spezifiziert ist. Sobald das Szenario, das zu der Beobachtung führt, genau angegeben ist, bestimmt es die Antwort und verschiedene zugrunde liegende Prozesse können zu verschiedenen Antworten führen. Offenbar haben beide von euch recht (Applaus vom Publikum).

Ein Absolvent des Instituts. Während der Diskussion habe ich das Buch von Feller durchgeblättert und bin auf das Problem der Familie mit zwei Kindern gestoßen, das wir gerade diskutiert haben. Mit Fellers Worten lässt sich Folgendes zu unserem Fall sagen: Die Lösung ½ ist die Antwort auf folgende Frage: Ein Mädchen aus einer Familie mit zwei Kindern wurde zufällig ausgewählt, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das andere Kind auch ein Mädchen ist? Die Antwort ⅓ könnte sich auf eine Kartothek von Familien beziehen, die mindestens ein Mädchen haben, aus der eine Karte zufällig ausgewählt wurde und wo nach der Wahrscheinlichkeit von zwei Mädchen gefragt wird; während sich die erste Frage auf eine Akte mit Mädchen bezieht (Feller 1957, S. 107; Glickman 1982). Ich frage mich jedenfalls, welches der Szenarien, das Treffen eines Mädchens mit ihrer Mutter in der Stadt oder das Treffen der Eltern auf einer Veranstaltung für Eltern von Pfadfinderinnen realistischer ist. (Falk 1993, Aufgabe 2.4.11)

Ein Professor für Statistik aus dem Publikum. Das ist eine nichtmathematische Frage außerhalb des Rahmens einer mathematischen Diskussion. Ich sehe den Hauptbeitrag dieser Geschichten in der Abgrenzung möglicher Arten von Ereignissen, die zu den Wahrscheinlichkeiten ½ oder ⅓ für *MM* führen. Es ist wichtig feststellen, dass die beiden Szenarien unsichere Ereignisse sind. Deshalb muss die Frage über die realen Chancen solcher Treffen außerhalb der Betrachtungen bleiben. Ungeachtet wie unwahrscheinlich sie sind, sie reduzieren alle die relevanten Wahrscheinlichkeiten um den gleichen Faktor und die relativen Wahrscheinlichkeiten von *JM, MJ* und *MM*, die die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit von *MM* bestimmen, bleiben unverändert.

Solche Szenarien können nur zum mathematischen Modell passen, oder besser gesagt, darauf hinweisen. Eine reale Mutter würde keine Münze werfen, um zu entscheiden, welches Kind mit ihr gehen soll, sogar wenn sie versucht fair zu sein; und Eltern die zwei Töchter haben, würden wohl mit größerer Wahrscheinlichkeit ein Elterntreffen für Pfadfinderinnen besuchen als Eltern mit nur einer Tochter. Es ist kaum möglich, eine reale Geschichte in der Weise zu erzählen, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit von *MM* exakt ½ oder ⅓ ist. Die Versuche, sich Szenarien auszudenken, die zu dem Modell perfekt passen, sind anerkennenswert, aber letzten Endes ist es ein hoffnungsloser Fall. Feller löste das Problem, indem er vorschlug, zufällig eine Karte aus einer Kartothek entweder von Mädchen oder von Familien mit wenigstens ein Mädchen zu ziehen. Er hat recht, aber sein Vorgehen passt zu den Modellen, weil es mathematisch ist. Nochmals, ich glaube, die zwei Szenarien dienen dem didaktischen Versuch *im Prinzip* die Unterschiede zwischen den Vorgängen, die zu den beiden Antworten führen, hervorzuheben.

Ein Mitglied des Instituts aus dem Publikum. Dieses Problem wurde bereits intensiv in der statistischen und psychologischen Literatur diskutiert. Ich unterrichte Wahrscheinlichkeit und Statistik schon sehr lange und meine Studenten sind sehr vertraut mit Ereignisräumen. Aber jedes Mal, wenn ich zu dem obigen Problem komme, führt das bedingende Ereignis *{JM, MJ, MM}* auf die falsche Spur. Selbst wenn gegeben ist, dass die Familie wenigstens eine Tochter hat oder sogar, wenn man sagt, dass ein Mädchen zufällig ausgewählt wurde, gehen sie gewöhnlich weiterhin von der Gleichwahrscheinlichkeit von *JM, MJ* und *MM* aus und erhalten ⅓. Damit sind sie nicht alleine, jüngste Forschungen durch Falk und Lann zeigten, dass Studierende die Gleichwahrscheinlichkeit aller Ereignisse in unterschiedlichen Kontexten voraussetzen, eingeschlossen solcher Fälle, in welchen diese Voraussetzung definitiv nicht geeignet ist. (Falk und Lann 2008)

Ergänzungen

Ein anderes Mitglied des Publikums. Wenn es nicht genug Informationen zur Lösung des Zwei-Kind-Problems gibt, dann sind die Dinge bei Familien mit drei Kindern wahrscheinlich genauso schwierig.

Moderator. Das ist durchaus möglich. Ich denke, es wäre nützlich ein Beispiel zu betrachten wie etwa dieses:

> Vorausgesetzt eine Familie hat drei Kinder und man erfährt, das zwei von ihnen Mädchen sind. Wenn man nur das weiß, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das dritte Kind auch ein Mädchen ist?

Gibt es dazu Meinungsäußerungen?

Jerry. Wir können damit beginnen, alle Fälle mit zwei oder drei Jungen aus dem Ereignisraum mit acht möglichen Tripeln zu eliminieren. Dann würde *{MMM, MMJ, MJM, JMM}* als bedingendes Ereignis übrig bleiben. Wenn wir diese Möglichkeiten als gleich wahrscheinlich betrachten können, dann ist die Wahrscheinlichkeit für *MMM* offensichtlich ¼. Aber wenn man weiß, dass mindestens zwei Kinder Mädchen sind aufgrund einer zufälligen Auswahl dieser Kinder, dann ist es am wahrscheinlichsten, dass der Fall *MMM* zu der Beobachtung führt. Wir wollen erneut den Satz von Bayes benutzen: Es sei M_3 das Ereignis, das alle drei Kinder Mädchen sind und m_2 bezeichne das Ereignis, dass zwei zufällig ausgewählte Kinder Mädchen sind. Dann gilt:

$$P(M_3|m_2)$$

$$= \frac{1 \cdot (1/2)^3}{1 \cdot (1/2)^3 + 3 \cdot (1/3)(1/2)^3 + 0 \cdot (1/2)^3} = \frac{1}{2}$$

Tom. Warum gehen wir nicht sogar weiter und ersetzen 3 durch n? In Erweiterung der oberen Formel von Bayes erhalten wir dann:

$$P(M_n|m_{n-1})$$

$$= \frac{1 \cdot (1/2)^n}{1 \cdot (1/2)^n + n \cdot (1/n)(1/2)^n + 0 \cdot (1/2)^n} = \frac{1}{2}$$

Großartig! (begeistert) Wenn bekannt ist, dass $n-1$ zufällig ausgewählte Kinder Mädchen sind, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass das n-te Kind auch ein Mädchen ist, gleich ½. Das ist das, was ich euch zu Beginn sagen wollte! Das ist das Wesen der Unabhängigkeit der Ereignisse. Was macht es, wenn man feststellt, dass $n-1$ zufällig ausgewählte Kinder Mädchen sind, das Geschlecht des n-ten Kindes ist ebenfalls Ergebnis eines Münzwurfes. In der Tat, die Lösung ½ zeigte mehr als eine Erklärung des Offensichtlichen. Wir kommen damit zum Ausgangspunkt zurück und stellen fest, was selbstverständlich sein sollte.

Meine Erkenntnis aus unseren vielen Überlegungen ist, dass die Voraussetzungen transparent sein sollten und der stochastische Mechanismus hinter den Szenarien unmissverständlich erklärt werden muss.

Abschließende Bemerkungen

Moderator. Das war eine stürmische Angelegenheit! Ich danke Tom und Jerry sowie allen Teilnehmern für die lebhafte Debatte und die instruktiven Schlussfolgerungen. (Ich schlage Falk 2011 als Zusatzlektüre vor.)

Literatur

Bar-Hillel, M.; Falk, R. (1982): Some teasers concerning conditional probabilities. In: *Cognition* 11(2), S. 109–122.

Carlton, M. A.; Stansfield, W. D. (2005): Making babies by flip of a coin? In: *The American Statistician* 59(2), S. 180–182

Falk, R. (1993): Understanding Probability and Statistics: A Book of Problems. Wellesley, MA: AK Peters

Falk, R. (2011): When truisms clash: Coping with a counterintuitive problem concerning the notorious two-child family. In: *Thinking and Reasoning* 17(4), S. 353–366

Falk, R.; Lann, A. (2008): The allure of equality: uniformity in probabilistic and statistical judgment. In: *Cognitive Psychology* 57(4), S. 293–334

Feller, W. (1957): An Introduction to Probability Theory and Its Applications (Vol. 1). New York: Wiley

Fisher, R. A. (1934): The effect of methods of ascertainment upon the estimation of frequencies. In: *Annals of Eugenics* 6(1), S. 13–25

Gardner, M. (1959): The Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions. New York: Simon & Schuster

Glickman, L. V. (1982): Families, children and probabilities. In: *Teaching Statistics* 4(3), S. 66–69

Loyer, M. W. (1983): Bad probability, good statistics and group testing for binomial estimation. In: *The American Statistician* 37(1), S. 57–59

Nickerson, R. S. (1996): Ambiguities and unstated assumption in probabilistic reasoning. In: *Psychological Bulletin* 120(3), S. 410–433

Anschrift der Verfasser

Ruma Falk
Hebrew University of Jerusalem, Israel
rfalk@cc.huji.ac.il

Keith Kendig
Cleveland State University, Ohio, USA
k.kendig@csuohio.edu